ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ (ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОМУ ЗАЧЕТУ)

по дисциплине

**«МАТЕМАТИКА»**

код/специальность

**34.02.01 «СЕСТРИНСКОЕ ДЕЛО»**

**1 курс**

Москва
2018

Практические задания выполняются обучающимся самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Цели практических заданий:

- помочь обучающимся систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;
- научить обучающихся приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;
- научить их пользоваться справочной литературой и таблицами;
- формировать умение учиться самостоятельно, т. е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

В результате самостоятельного решения практических занятий по дисциплине обучающийся должен:

знать:

- основные математические методы решения прикладных задач;
- определение логарифма числа и основные свойства логарифмов;
- основные определения и теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых, прямой и плоскости и плоскостей в пространстве
- определение вектора и действия над векторами;
- основные формулы решения тригонометрических уравнений;
- основные определения многогранников и круглых тел;
- основные формулы вычисления площадей плоских фигур, формул площадей поверхности и объемов многогранников и круглых тел;

уметь:

- находить логарифм числа, решать простейшие логарифмические уравнения, используя свойства логарифмов;
- строить чертежи к задачам и находить расстояние между плоскостями, расстояние от точки до плоскости,
- находить проекцию наклонной и длину наклонной;
- находить производные функций;

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать тригонометрические уравнения и системы уравнений;
- строить графики функций и проводить преобразования над ними;
- строить сечения многогранников и круглых тел;
- вычислять площади поверхности и объемы многогранников и круглых тел.

При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса. Если обучающийся видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Вопросы для подготовки к итоговой аттестации по дисциплине «Математика»**

1) Аксиомы стереометрии.
2) Векторы и скалярные величины.
3) Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.
4) Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
5) Взаимное расположение прямой и плоскости.
6) Возрастание и убывание функций.
7) Геометрический смысл производной.
8) График логарифмической функции.
9) График степенной функции.
10) Графики тригонометрических функций.
11) Действия над векторами, заданными в координатной форме. Угол между векторами.
12) Иррациональные уравнения.
13) Квадратные уравнения, их решение.
14) Конус, площадь поверхности и объем конуса.
15) Координаты вектора.
16) Линейные уравнения, их решение, свойства
17) Логарифмическая функция, ее свойства и график.
18) Логарифмы с произвольным основанием. Основное логарифмическое тождество.
19) Механический смысл производной.
20) Модуль вектора. Действия над векторами.
21) Непрерывность функции в точке и на промежутке. Асимптоты.
22) Обратные тригонометрические функции.
23) Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
24) Основные тригонометрические тождества.
25) Перестановки, размещения, сочетания.

26) Перпендикуляр и наклонная.
27) Пирамида. Площадь поверхности и объем пирамиды.
28) Показательная функция, ее свойства и график.
29) Понятие первообразной.
30) Правила нахождения производных.
31) Предел последовательности.
32) Призма, ее площадь поверхности и объем.
33) Производная сложной функции.
34) Решение дробно-рациональных неравенств методом интервалов.
35) Решение системы из 2-х линейных уравнений методом Крамера.
36) Свойства функций: четность, нечетность, периодичность, область определения, область значений, монотонность.
37) Скалярное произведение векторов.
38) Соотношения между градусной и радианной мерами дуг.
39) Таблица первообразных.
40) Таблица производных.
41) Теорема о трех перпендикулярах.
42) Точки экстремума и экстремумы функций.
43) Тригонометрическая форма комплексного числа.
44) Тригонометрические уравнения.
45) Тригонометрические функции двойного аргумента.
46) Уравнение сферы.
47) Уравнения плоскости в пространстве.
48) Уравнения прямой на плоскости.
49) Функция. Способы задания функции.
50) Цилиндр. Площадь поверхности и объем цилиндра.
51) Числовая последовательность.
52) Числовые множества: натуральные, целые, рациональные, действительные числа.

53) Шар и сфера.

## Тема: Функции одной переменной и их свойства.

**Цель:** сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи и упражнения по данной теме.

### Теоретические сведения к практической работе

Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множестваY, то говорят, что на множестве X определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(x).

Множество X называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

*Пример 1*. Найти область определения функции

$$1)\, y=\frac{15}{x+6}$$

$$x+6\neq 0$$

$$x\neq -6$$

$$D(\mathrm{y})=(-\infty;-6)\cup(-6;\infty)$$

$$2)\, y=\frac{x+13}{x^2-7x+12}$$

$$y=\frac{x+13}{x^2-7x+12}=\frac{x+13}{(x-3)(x-4)}$$

$$x-3\neq 0 \quad x-4\neq 0$$

$$x\neq 3 \quad x\neq 4$$

$$D(\mathrm{y})=(-\infty;3)\cup(3;4)\cup(4;\infty)$$

$$3)\, y=\sqrt{x^2-81}$$

$$x^2-81\geq 0$$

$$(x-9)(x+9)\geq 0$$

$$D(\mathrm{y})=(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$$

Основные свойства функции:

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений x из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

*Пример 2*. Установить четность или нечетность функции.

1) $y = x^2 + 6$

$y(-x) = (-x)^2 + 6 = x^2 + 6 = y(x)$

$\Rightarrow$ *функция четная*

2) $y = \sin x + 2x$

$y(-x) = \sin(-x) + 2(-x) = -\sin x - 2x = -(\sin x + 2x) = -y(x)$

$\Rightarrow$ *функция нечетная*

3) $y = \dfrac{x+2}{x^2-16}$

$y(-x) = \dfrac{(-x)+2}{(-x)^2-16} = \dfrac{-x+2}{x^2-16}$

$\Rightarrow$ *функция общего вида*

2. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
3. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке X из области определения, если существует число M>0, такое, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.
4. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом T>0, если для любых значений x из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут q=f(p).

Эта функция определена для тех значений $p \ge 0$, для которых $f(p) \ge 0$ и множество ее значений $q \ge 0$.

## Содержание практической работы:

**Задание 1.** Найти область определения функции

**Задание 2.** Установить четность или нечетность функции.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Тема: Непрерывность функции, точки разрыва.**

**Цель:** сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

## Теоретические сведения к практической работе

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если она:

1) определена в точке $x_0$;

2) имеет конечный предел при $x \to x_0$;

3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если:

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \quad \Delta f = f(\mathrm{x}_0 + \Delta \mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = f(\mathrm{x}_0)$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке *X*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

*Пример 1*: Доказать, что функция $f(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2 - 2x + 1$ непрерывна на (-∞;+∞)

*Решение*:

$$\Delta f = \left(3\left(\mathrm{x}_0 + \Delta x\right)^2 - 2\left(\mathrm{x}_0 + \Delta x\right) + 1\right) - \left(3\mathrm{x}_0{}^2 - 2\mathrm{x}_0 + 1\right) = 3\mathrm{x}_0{}^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3\mathrm{x}_0{}^2 + 2\mathrm{x}_0 - 1 =$$
$$= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}\left(6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x\right) = 0$$

Точка $x_0$ называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

*Классификация точек разрыва:*

1) $x_0$ – точка устранимого разрыва, если а) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$

   б) в точке $x_0$ функция не определена

2) $x_0$ – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

   $h = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ - скачок функции

3) $x_0$ – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

*Пример 2*:

Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$a)\ y = f(x) = \begin{cases} x^2+1, x<1 \\ 0, x=1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right) = 2$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(x+1\right) = 2$$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad \textit{точка} \quad \textit{устранимого} \quad \textit{разрыва}$$

$$б)\ y = f(x) = \begin{cases} x^2, x\le 1 \\ x-2, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0} x^2 = 1 \neq \lim_{x\to 1+0}\left(x-2\right) = -1$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad I \quad \textit{рода}$$

$$h = -1-1 = -2$$

$$в)\ y = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad II \quad \textit{рода}$$

## Содержание практической работы

**Задание 1.** Доказать, что функция является непрерывной

$а) f(\mathrm{x}) = x + 9$

$б) f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 + 8$

$в) f(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 + 6x - 5$

$г) f(\mathrm{x}) = 10\mathrm{x}^2 - 12x$

**Задание 2.** Найти точки разрыва и установить их тип

$$а)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -e^{-x}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ e^{x}, x > 0 \end{cases}$$

$$б)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\sin x}{x}$$

$$в)\ y = f(\mathrm{x}) = e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\cos x}{x}$$

## Тема: Производная и ее геометрический смысл. Правило Лопиталя.

**Цель:** сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

### Теоретические сведения к практической работе

*Производной функции* $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной $\Delta x$ при стремлении последнего к нулю:

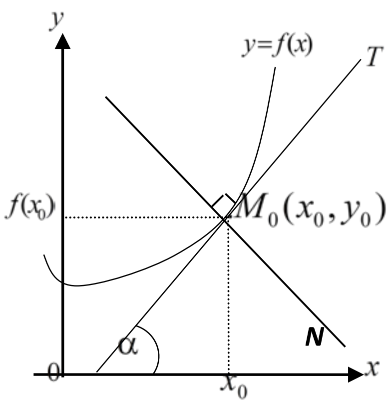
$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке $x_0$:

$f'(x_0),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \left.y'_x\right|_{x_0},\ y'(x_0)$ и другие.

Если функция в точке $x_0$ (или на промежутке $X$) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке $X$).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.




*Геометрический смысл производной.*

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x_0$ (прямая $M_0T$) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

(2)

а уравнение нормали ($M_0N$):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

*Правила дифференцирования*

| № пп | $U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции | № пп | $U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции |
|---|---|---|---|
| **I** | $(u \pm v)' = u' \pm v'$ | **VI** | Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$ |
| **II** | $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ | **VII** | Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. |
| **III** | $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $\quad c = \mathrm{const}$ | | |
| **IV** | $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$ | **VIII** | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **V** | $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$ | | Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$. |

*Формулы дифференцирования основных элементарных функций*

| № пп | $c$=const, $x$ — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $C' = 0$ | **9** | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ |
| **2** | $x' = 1$ | **10** | $(\text{tg}u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| **3** | $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ | **11** | $(\text{ctg}u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ |
| **4** | $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ | **12** | $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$ |
| **5** | $(e^u)' = e^u \cdot u'$ | **13** | $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$ |
| **6** | $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$ | **14** | $(\text{arctg}u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ |
| **7** | $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(u > 0)$ | **15** | $(\text{arcctg}u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ |
| **8** | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ | | |

*Пример 1*. Найти производные функций:

$$a)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \text{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\text{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

*Решение.*

*а*) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

*б*) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть $t$, т. е. $t$=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$
$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

*в*) Сложная степенная функция, независимая переменная есть $v$, т. е. $v$=1; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$
$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

*г*) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что $t$=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$
$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4 \cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2 - 8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

*Пример 2*. Найти дифференциалы функций:

*а*) $y = x + \cos 2x$; *б*) $u = 3 + e^{-x}$; *в*) $s = \ln 3t$.

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx,$ т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

*Решение.*

*а*) $dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

*б*) $du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

*в*) $ds = (\ln 3t)'dt = \frac{(3t)'}{3t}dt = \frac{3}{3t}dt = \frac{1}{t}dt.$

## Содержание практической работы

**Задание 1**. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) *а*) $y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; *б*) $s = (1 + t^2)(2 - 3\operatorname{arcctg} t)$; *в*) $u = \ln^3 \frac{V}{2}$; *г*) $z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$.

2) *а*) $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; *б*) $s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$; *в*) $u = \sin^4(2V + 3)$; *г*) $z = \frac{\sin(2 - t)}{2 - \ln 3t}$.

**Задание 2**. Найти дифференциалы функций:

1) $y = \sin 2x + 5;$

2) $y = \ln x - x^3;$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Тема: Интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл.**

**Цель:** сформировать умение вычислять неопределенные и определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

## Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале $(a,b)$, называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале $(a,b)$, если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$, где $C$ — const .

*Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, $C$ — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);\quad d\int f(x)dx=f(x)dx;$

2. $\int dF(x) = F(x) + C;$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

*Таблица основных интегралов*

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C;$

6. $\int e^{u}du = e^{u} + C;$

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

*Пример 1.* Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

*Решение.*

*Проверка:*

*Определенный интеграл, его вычисление и свойства*

*Определенный интеграл* от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (5)$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

*Свойства определенного интеграла*:

$$1)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \qquad 2)\int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$3)\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$4)\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

5) $\int\limits_a^b Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^b f(x)\,dx,\ C - \text{const};$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \qquad (6)$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ – обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU, \qquad (7)$$

*Пример 2.* Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$

*Решение.*

$$\int\limits_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3\right) =$$

$$= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5\right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49\frac{1}{3}$$

## Содержание практической работы

**Задание 1**. Вычислить интегралы.

1. $\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1\right)dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3+5x^3}}\,dx$

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$

**Задание 4**. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 \left(x^3+10x\right)dx$

2) $\int_{-2}^3 \left(3x^2+6x-2\right)dx$

3) $\int_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx$

4) $\int_0^8 \left(21x-19\right)dx$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Тема: Применение определенного интеграла для вычисления площадей, длин и объемов фигур.**

**Цель:** сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

## Теоретические сведения к практической работе

*Площади плоских фигур*

1. *Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат*

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left( f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (8)$$

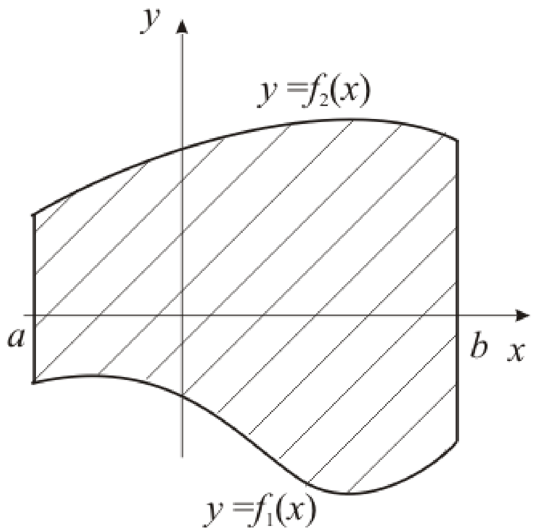



Рис. 1

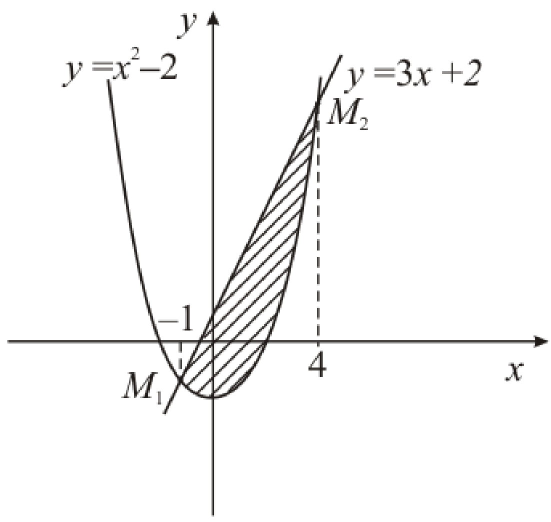



Рис. 2

*Пример.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2$, $y = 3x + 2$.

***Решение*.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

| x | 0 | 1 | –1 | 2 | –2 | 3 | –3 | 4 | –4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | –2 | –1 | –1 | 2 | 2 | 7 | 7 | 14 | 14 |

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1,\ -1)$.

Найдем координаты точек $M_1$ и $M_2$ пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1, \quad y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1), \quad M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2, \quad f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

## Содержание практической работы

**Задание 1**. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2, \ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1, \quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2, \ y = x + 1$

5) $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1, \ y = 1 - x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Тема: Элементы теории вероятностей и математической статистики: классическое определение вероятности события, формула полной вероятности.**

**Цель:** сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

## Теоретические сведения к практической работе

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

*Пример 1*: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события $A_1$, $A_2$ … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: 0<P(A)<1.

*Пример 2*: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

*Решение:* Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

*Пример 3*: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

*Решение*: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B). P(A)+P($\overline{A}$)=1

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

*Пример 4*: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

*Решение*: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$
$m_1 = 4$
$p_1 = \frac{4}{10}$
$n_2 = 10$
$m_2 = 3$
$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

## Содержание практической работы

**Задание 1.** Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

## ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ

**1.** Вычислите: $16^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}}$.

**2.** $9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

**3.** $6^{\frac{1}{3}} \cdot 18^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}$

**4.** $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

**5.** $8^{\frac{1}{3}\log_2 6}$

**6.** $3^{2\log_9 12}$

**7.** $25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}$.

**8.** $9^{1,5} - 81^{0,5} - 0,5^{-2}$

**9.** $\left(27^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2\right)^{\frac{5}{6}}$.

**10.** $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 36^{\frac{1}{6}} : 2^{\frac{4}{3}}$.

**11.** $(\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8})^{\lg 5}$

**12.** $(\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4})^{\log_5 7}$

**13.** $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{8} : 7^{2\log_{49} 2}$

**14.** $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2}$

**15.** $12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$

**16.** $7^{0,5\log_7 9}$

**17.** $3^{\frac{1}{2}\log_3 9}$

## ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.

### УРАВНЕНИЯ:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

1. $4^{x^2-8x+12} = \frac{1}{64}$.
2. $3^{x^2+3x-2} = \frac{1}{81}$
3. $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x} - 3 = 0$.
4. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} - 4 = 0$.
5. $3^{x+2} + 3^{x} = 810$.
6. $2^{x+4} - 2^{x} = 120$
7. $4^{x} - 3 \cdot 2^{x} = 4$.
8. $9^{x} + 8 \cdot 3^{x} = 9$
9. $7^{x+2} - 14 \cdot 7^{x} = 5$.
10. $3^{x+2} - 5 \cdot 3^{x} = 36$

**НЕРАВЕНСТВА:**

1. $(\frac{1}{4})^{2+3x} < 8^{x-1}$
2. $(\frac{1}{27})^{2-x} > 9^{2x-1}$
3. $4^{5x+3} \geq 16$.
4. $3^{3x-8} \leq 9$.
5. $2^{4x^2-11x} > \frac{1}{64}$.
6. $3^{4x^2-7x} < \frac{1}{27}$.
7. $3^{x} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{2x+3} < 9$.

8. $3^{x^2} \leq 81$,
9. $27^{x} < 9$,
10. $8^{x} > 4^{x^2-1}$,
11. $2^{x^2} \geq 16$,
12. $27^{1+2x} > (\frac{1}{9})^{2+x}$.
13. $(\frac{1}{4})^{2+3x} < 8^{x-1}$.
14. $27^{x} < 9^{x^2-1}$.

15. $10^{3x+1} > 0{,}001$
16. $100^{2x+1} < 0{,}1$.
17. $(\frac{1}{4})^{2+3x} < 8^{x-1}$.
18. $(\frac{1}{27})^{2-x} > 9^{2x-1}$

**ЛОГАРИФМЫ.**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Вычислите:

$\log_{99} 9 + \log_{99} 11$.

$\log_{12} 3 + \log_{12} 4$.

$\log_2 24 - \log_2 6$.

$\log_3 54 - \log_3 2$ .

$\log_6 36 + \log_2 32$ .

$\log_5 25 + \log_3 27$ .

$\log_3 81 + \log_4 16 + \log_6 36$.

$\log_3 27 - \log_2 64 + \log_5 25$.

Решите уравнение:

1. $\log_3 (12 – 5x) = 2$.

3. $\log_{\frac{1}{2}} ( x^2 – 5x + 6) = –1$.

4. $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x – 5) = – 4$.

5. $\log_2 (2\mathbf{x} – 1) = 3$.

Решите неравенство:

1. Найдите целые решения неравенства: $0{,}04 \le 5^{2-x} \le 25$.

$0{,}2 \le 5^{x+4} \le 125$

$\frac{1}{7} \le 7^{x-3} < 49$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

$$\frac{1}{8} < 2^{x-1} \le 16$$

$\log_2(x^2 - x - 2) \ge 2.$

$\log_3(x^2 - 2x) > 1.$

$\log_6(x^2 - 3x + 32) = 2.$

$\log_3(x^2 + 7x + 37) = 3.$

Найдите значение выражения:

$\sqrt{\log_{16} 4 + \log_{16} 24 - \log_{16} 6}$.

$\sqrt{\log_4 32 + \log_4 14 - \log_4 7}$

Найдите область определения функции:

$y = \lg(2x^2 + 9x)$, $y = \lg(x^2 - 7x)$,

$y = \lg(x^2 - 8x)$, $y = \lg(4x^2 + 11x)$,

$y = \lg \frac{3x+1}{x-4}$,

$y = \lg \frac{32-8x}{x+1}$.

Решите системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y - x) = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ \log_2(2x + y) = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ \log_2(2x + y) = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y - x) = 2. \end{cases}$$

**cos x , sin x.**

Найдите cos **x**, если sin **x =** $-\frac{15}{17}$ ; π < **x** < $\frac{3}{2}$ π.

Найдите sin **x**, если cos **x =** $\frac{8}{17}$ ; $\frac{3}{2}$π < **x** < 2π .

Найдите sin **x**, если cos **x =** 0,6 ; 0 < **x** < $\frac{1}{2}$π.

Найдите cos **x**, если sin **x = -** 0,8 ; $\frac{3}{2}$π < **x** < 2π.

Найдите sin **x**, если cos **x= -** $\frac{12}{13}$ ; π < **x** < $\frac{3}{2}$π.

Найдите cos **x**, если sin **x =** $\frac{5}{13}$; $\frac{1}{2}$π < **x** < π.

Найдите sin **x**, если cos **x = -** $\frac{5}{13}$; π < **x** < $\frac{3}{2}$π.

Найдите cos **x**, если sin **x =** $\frac{12}{13}$ ; 0 < **x** < $\frac{1}{2}$π.

Найдите sin **x**, если cos **x = -** $\frac{3}{5}$ ; $\frac{1}{2}$π < **x** < π.

Найдите cos **x**, если sin **x =** $\frac{4}{5}$ ; $\frac{1}{2}$π < **x** < π.

Найдите cos **x**, если sin **x =** - 0,6 ; π < **x** < $\frac{3}{2}$ π.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Найдите sin **x**, если cos **x =** 0,8 ; $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

## ЗАДАЧИ.

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)= t^3 - 2t^2 + 3t$. Найдите ее скорость в момент времени $t = 1$.

2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)= t^3 + 2t^2 - 3t$. Найдите ее скорость в момент времени $t = 2$.

3. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = 1 + 4t - t^2$ (м), где t – время движения в секундах. Через какое время после начала движения тело остановится?

4. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = 12t - 3t^2$ (м), где t – время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = 5t - 0{,}5t^2$ (м), где t – время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4с после начала движения.

6. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 3t + t^2$ (м), где t - время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3с после начала движения.

7. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = t + 0{,}5t^2$ (м), где t – время движения в секундах. Найдите скорость через 4с после начала движения.

8. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = 5t - 0{,}5t^2$ (м), где t – время движения в секундах. Найдите скорость через 2с после начала движения.

9. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = t^3 - 3t + 4$ (м), где t – время движения в секундах. Найдите скорость через 3с после начала движения.

10. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = 0{,}5t^2 + 3t + 4$ (м), где t – время движения в секундах. Найдите скорость через 2с после начала движения.

11. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 1 + 4t - t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Через какое время после начала движения тело остановится?

12. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 4 + 3t - 0{,}5t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

13. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 3t + t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

14. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 5t - 0{,}5t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4 с после начала движения.

15. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 5t - 0{,}5t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4 с после начала движения.

16. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 3t + t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

17. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S = t + 0{,}5t^2$ (м), где t – время движения в секундах.
Найдите скорость через 4с после начала движения.

18. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S = 5t - 0{,}5t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Найдите скорость тела через 2с после начала движения.

19. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S = 5t - 0{,}5t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах. Найдите скорость через 2с после начала движения.

20. Тело движется по прямой так, что расстояние $S$ от начальной точки изменяется по закону $S = t + 0{,}5t^2$ (м), где $t$ – время движения в секундах.
Найдите скорость через 4с после начала движения.

## НЕРАВЕНСТВА.

Решите неравенства методом интервалов:

1. $\dfrac{x^2+5x}{2-8x} > 0.$
2. $\dfrac{16x^2-x}{12-x} < 0.$
3. $\dfrac{8-32x^2}{x-10} > 0.$
4. $\dfrac{(x-6)(4x+7)}{9-x} \geq 0.$

5. $\frac{(x+5)(x-6)}{6x-1} \le 0.$

6. $\frac{x^2+10x}{2-5x} < 0.$

7. $2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5x-3} < 2.$

## ФУНКЦИЯ

Укажите промежутки возрастания и убывания функции и тангенс угла наклона касательной в точке максимума:

$y = x^4 - 6x^2 + 1.$

$y = -x^4 + 4x^2 - 3.$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке [-2; 1].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ на отрезке [-1; 2].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке [-2; 1].

Найдите промежутки убывания функции: $f(x) = -x^3 + x^2 + 8x$

Найдите промежутки возрастания функции: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$.

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ на промежутке [1; 4].

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 1 + 8x - x^2$ на промежутке [2; 5].

## СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (+логарифмы)

Решите систему уравнений:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

1. $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 3, \\ 5^{x+3y} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y - x) = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y = 7, \\ \log_2(2x + y) = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y = 7, \\ \log_2(2x + y) = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y - x) = 2. \end{cases}$

## РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

1 $5 - 4\sin x = 4\cos^2 x$.

2. **5 -** $4\sin^2 x = 4\cos x$
3. $\cos 2x + \sin x = 0$.
4. $\cos 2x + \cos x = 0$.
5. $\cos(\pi + x) = \sin \dfrac{\pi}{2}$
6. $\sin(-x) = \cos \pi$.
7. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
8. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.
9. $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$.
10. $\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$.
11. $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$.

12. $\cos 2x - 7\cos x + 4 = 0$

13. $\cos 2x = 5 + 4\cos x$

14. $2\cos 2x = 1 + 4\cos x$

## ЗАДАЧИ НА ОБЪЕМ, ПЛОЩАДЬ И Т.Д.

1. Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4см и 6см вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.
2. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6см и 8см вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.
3. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 4см и 7см, вокруг большего катета.

4. Высота конуса равна 12см, а его образующая равна 13см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

5. Высота конуса равна 5см, а угол при вершине осевого сечения равен $120^{\circ}$. Найдите объем конуса.

6. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна 8 $\sqrt{2}$ см. Найдите объем цилиндра.

7. Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4см и 6см вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.

8. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетом 6см и гипотенузой 10см вокруг большего катета.

9. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3см и 4см вокруг большего катета.

10. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6см и 10см вокруг большей стороны.

11. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см. Найдите объем цилиндра.

12. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6см и 8см вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.

## ПРОИЗВОДНАЯ

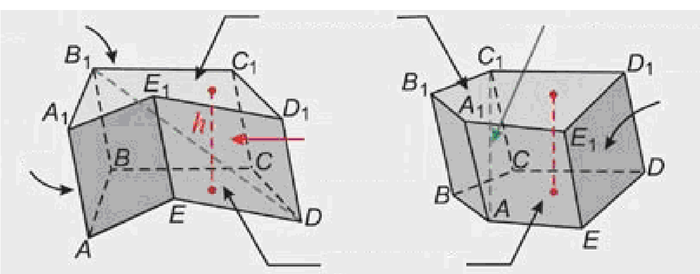
Найдите производную функции:

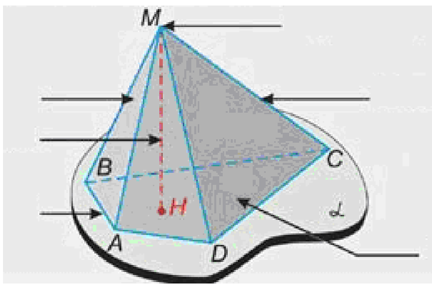
1. $f(x) = 2x^2 + \text{tg } x$.
2. $f(x) = 2x^2 + \sin x$.
3. $f(x) = 2x^2 + \text{tg } x$.
4. $f(x) = 2x^2 + \sin x$.

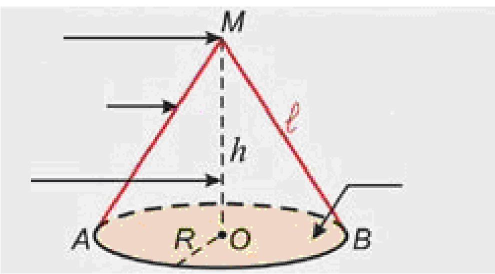
## ГЕОМЕТРИЯ

**ТЕКСТ ЗАДАНИЯ:**

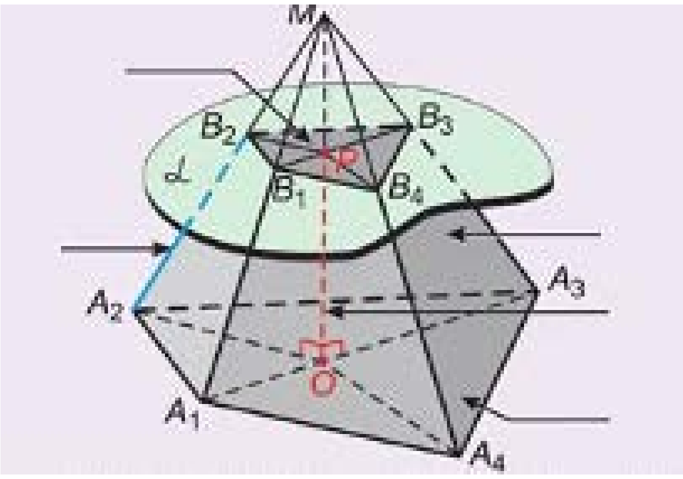
Назовите все элементы пространственных тел.

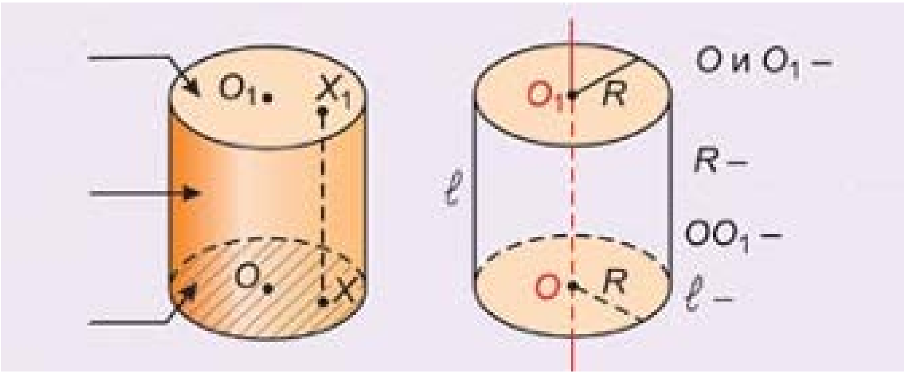


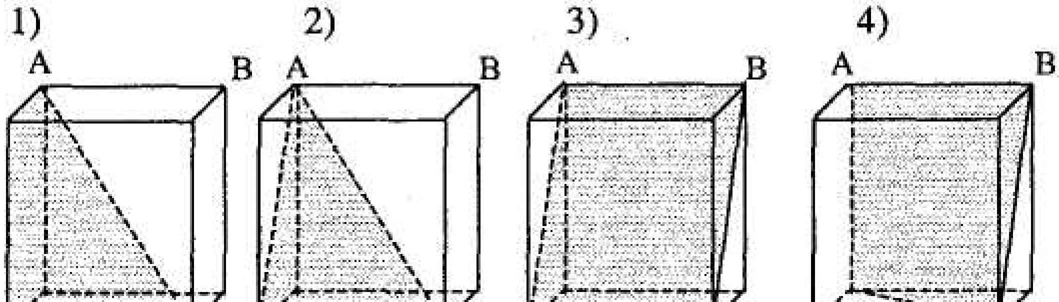
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



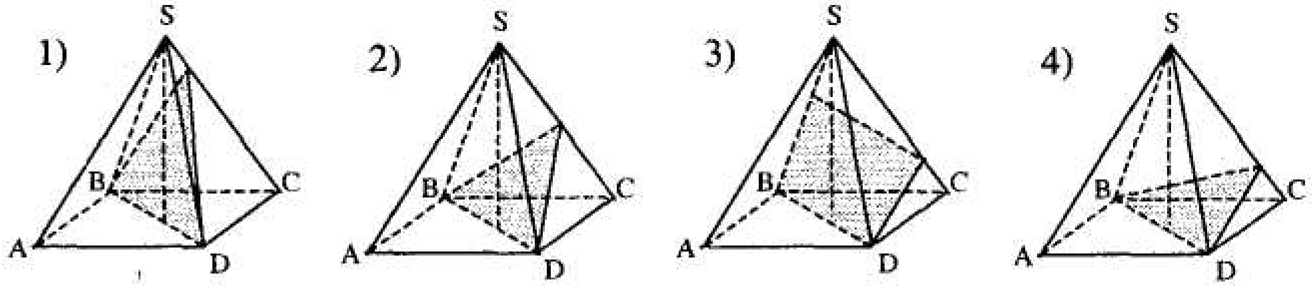




**ТЕКСТ ЗАДАНИЯ:**

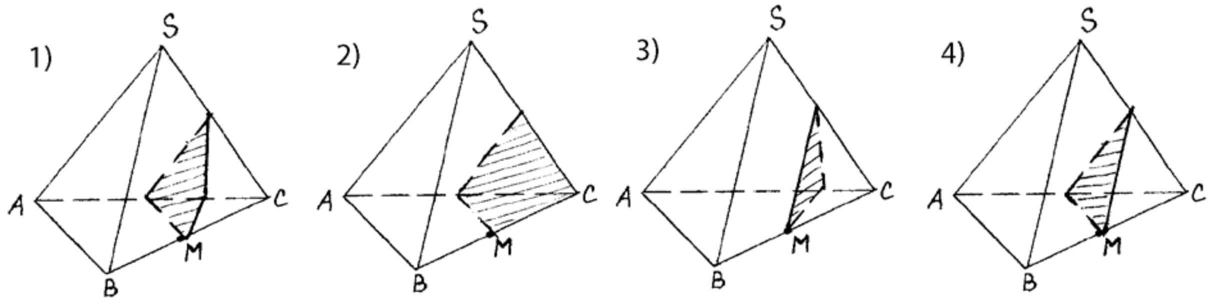
I. На каком рисунке изображено сечение куба плоскостью *ABC*?



II. На каком рисунке изображено сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания *BD* параллельно ребру *SA*?

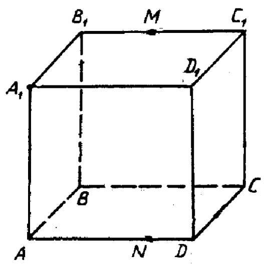



III. На каком рисунке изображено сечение тетраэдра, проходящее через точку *M* параллельно плоскости *ABS*?



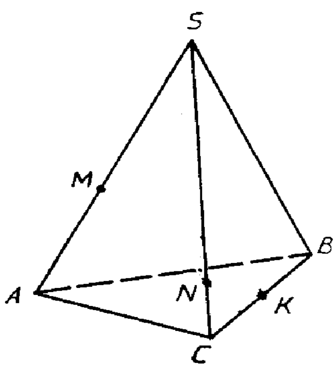

Задача 1 Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $A_1$; $M \in B_1C_1$; $N \in AD$.

Построение:



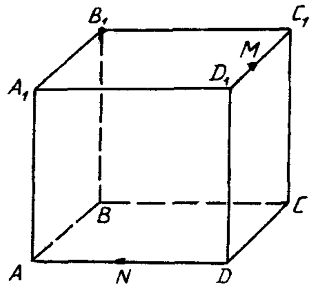

Задача 2 Построить сечение тетраэдра *SABC* плоскостью, проходящей через точки: $M \in SA$; $N \in SC$; $K \in BC$.

Построение:



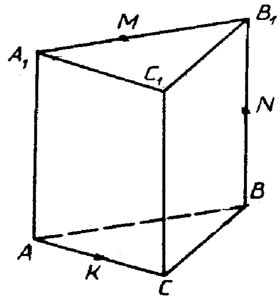
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Задача 1 Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in C_1D_1; B_1$ и $N \in AD$.




Построение:

Задача 2 Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки: $M \in A_1B_1$; $N \in BB_1$ и $K \in AC$.




Построение:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
УПРАВЛЕНИЯ ДЕЛАМИ ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Задания для проведения самопроверки.**

**ТЕКСТ ЗАДАНИЯ:**

**Задание 1. Найдите область определения функций**.

А) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$ Б) $y = \dfrac{1}{\sqrt[18]{x^2 - x - 6}}$

**Задание 2. Упростите**

А) $4^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ Б) $\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^8$

**Задание 3. Вычислите**

А) $\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 18$ Б) $\log_3 36 - \log_3 4$.

**Задание 4. Найдите значение выражения**

А) $\dfrac{24}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}}$ Б) $8 \cdot 8^{\log_8 6}$

**Задание 5. Найдите корень уравнения**

А) $\log_3(4 + x) = 5$ Б) $\log_3(10 - x) = \log_3 5$

**Задание 6. Найдите значение выражения**

$-x^2 + 5y + x(2y + x), ïðè \quad õ = 1{,}2 \quad ó = \frac{1}{3}$

**Задание 7. Найдите значение выражения**

А) $\sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{3} + ctg \frac{\pi}{4}$ Б) $0{,}5\cos 60^0 - \sqrt{3}\sin 60^0$

**Задание 8.** Дано: $\sin\alpha = \frac{20}{29}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите $cos\alpha$

**Задание 9. Постройте график функции**

А) y=sinx+3 Б) y=-3cosx

**Задание 10. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:**

А) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ Б) $y = 3x^4 - 6x^2$

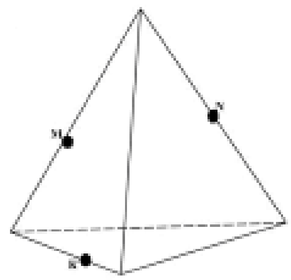
**Задание 11. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте эскиз график**

А) $y = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ Б) $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2$

**Задание 12. Найдите производные функций**

$y = 4x^3 - 3x^2$ Б) $y = 2\sin x + 3\cos x$ $y = 7e^x + \sin x$

**Задание 13 . Постройте сечение, проходящее через три заданные точки:**



**Задание 14. Решите уравнения.**

А) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$

**Задание 15.**

- Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найдите объём параллелепипеда, если его высота равна 12 см, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол $45^0$ .

- В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 6 см. Боковые рёбра $\frac{6}{\pi}$ . Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.
- В правильной четырёхугольной пирамиде высота 4 м, боковое ребро 5 м. Найти объём.

**Задание 16. Решите уравнение**

А) $16\sqrt{x-2} - x^2 \cdot \sqrt{x-2} = 0$

Б) $25^x - 120 \cdot 5^x - 625 = 0$

В) $3^x + 18\left(\sqrt{3}\right)^x - 243 = 0$

**Задание 17** Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x + 7 > 7x - 9 \\ x - 3 > -3x + 1. \end{cases}$$

**Задание 18** Решите уравнение:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{7}{2} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{5}{2-2x}.$$

**Задание 19** Вычислите x: $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27}$ =x.

**Задание 20** Решите биквадратное уравнение: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

**Задание 21** Найдите область определения функции: $y = \sqrt{\frac{4x-8}{3-6x}}$ .

**Задание 22** Решите квадратное уравнение: $(x - 3)^2 + (x - 4)^2 - (x - 5)^2 - x = 24.$

**Задание 23** Решите квадратное неравенство методом интервалов:

$x^2 - 5x + 6 < 0.$

**Задание 24** Найдите значение производной функции в точке M(1;1):

$y = 3^{x-1}$.

**Задание 25** Постройте график функции: $y = \log_2(x - 2)$.

**Задание 26** Решите показательное уравнение: $9^{2\sqrt{x}} = 3^{2x-6}$.

**Задание 27** Решите показательное неравенство: $\frac{1}{3}^{x} \leq 27$.

**Задание 28** Найдите первообразную функции $y = \sin x + 2$, проходящую через точку М(0;1).

**Задание 29** Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1$.

**Задание 30** Найдите градусную меру угла $\frac{5\pi}{36}$.

**Задание 31** Решите тригонометрическое уравнение: $\mathrm{tg}\,(3x + 1) = 1$.

**Задание 32** Найдите площадь ортогональной проекции фигуры на плоскость, если площадь фигуры равна 20 см$^2$, а угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции составляет $45^0$.

**Задание 33** Найти производную функции: $y = (2x+3)^8$.

**Задание 34** Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4-x^2$, $y=0$.

**Задание 35** Из точки А на плоскость $\alpha$ проведены перпендикуляр АВ и наклонная АС. Длина перпендикуляра АВ равна 12 см, длина проекции наклонной ВС равна 5 см. Найдите длину наклонной АС.

**Задание 36** Найдите координаты и длину вектора $AB$, если А(- 3;1), В(3;3).

**Задание 37** Найдите область определения функции: У = $\log_3 \frac{2x-2}{3x+6}$

**Задание 38** Проверьте, коллинеарны ли векторы а = (2;6) и с = (-6;2).

**Задание 39** Бросают игральную кость. Какова вероятность, что выпадет больше 4 очков?

**Задание 40** Найдите cos x, если sin x = 0.6 и x – угол 2 четверти.

**Задание 41** Найдите скорость тела в момент времени t=3 с, если его координата изменяется по закону: $x = t^3 - 2t^2 + 3$.